©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Über biquadratische Involutionen zweiter Stufe und ihre typischen Curven.

Von **Emil Weyr.**

I. Fundamental-Involutionen auf der Curve C_4.

Es seien $d_1\ d_2\ d_3$ oder allgemeiner $d_i\ d_k\ d_l$ die Doppelpunkte einer ebenen Curve vierter Ordnung C_4; die beiden Nachbarpunkte eines Doppelpunktes d_i sollen kurz als das Punktepaar d_i bezeichnet werden.

Für die Untersuchung der Curve C_4 sind gewisse Involutionen von Punkten (oder Tangenten) auf derselben von grosser Bedeutung. Zunächst sind dies drei quadratische Punktinvolutionen, welche gleichzeitig mit der Curve auf ihr gegeben erscheinen und welche wir als die drei quadratischen Fundamentalinvolutionen der Curve C_4 bezeichnen wollen.

Ein um d_i rotirender Strahl wird nämlich C_4 in Punktepaaren schneiden, welche eine quadratische Involution auf C_4 bilden und es ist auch sofort klar, dass die zwei Punktepaare d_k, d_l dieser Involution angehören; eine solche Involution soll eine Fundamentalinvolution genannt und als dem Doppelpunkte d_i entsprechend bezeichnet werden.

„Durch je zwei der drei Punktepaare d_i wird eine quadratische (Fundamental-)Involution auf C_4 bestimmt; die Verbindungslinien entsprechender Punkte gehen durch den jeweiligen dritten Doppelpunkt d hindurch."

Jedes der drei Punktepaare d_i ist also das zweien von den drei Fundamentalinvolutionen gemeinschaftliche Elementenpaar.

„Die Doppelpunkte der durch die zwei Punktepaare $d_i\ d_k$ bestimmten Fundamentalinvolution sind somit die Berührungspunkte der Curve mit den Tangenten, welche man von dem dritten Doppelpunkte d_l an die Curve legen kann."

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Aus jedem der drei Doppelpunkte lassen sich also zwei Tangenten an die Curve legen und wenn man zu diesen die beiden Tangenten des Doppelpunktes rechnet, von denen jede zwei zusammenfallende durch ihn gehende Tangenten repräsentirt, so gelangt man auch so zu dem bekannten Satze, dass die Curve von der sechsten Classe ist.

Ausser diesen drei Fundamentalinvolutionen, welche man als die „centralen" bezeichnen könnte, kann man auch jene betrachten, welche die Nachbarpunkte der Doppelpunkte zu Doppelelementen haben. Durch jedes der drei Punktepaare d_i als Doppelpunktepaare ist in dieser Art eine weitere „nicht centrale" quadratische Fundamentalinvolution auf der Curve bestimmt.

II. Abbildung der Curve auf einen Kegelschnitt.

Wird die Curve C_4 auf einen Kegelschnitt K abgebildet, so treten die drei Punktepaare $d_1 d_1''$, $d_2' d_2''$, $d_3' d_3''$ auf K als Bilder der drei Doppelpunkte $d_1 d_2 d_3$ der Curve C_4 auf. Die drei Geraden $\overline{d_1' d_1''}$, $\overline{d_2' d_2''}$, $\overline{d_3' d_3''}$ bilden ein Dreieck, dessen Ecken o_1, o_2, o_3 sein mögen. Die Bilder der drei centralen Fundamentalinvolutionen sind jene quadratischen Involutionen auf K, welche durch die drei Strahlenbüschel o_1, o_2, o_3 auf K bestimmt werden. Ist also x das Bild eines Curvenpunktes, so treffen die drei Strahlen $o_1 x$, $o_2 x$, $o_3 x$ den Kegelschnitt in drei Punkten, welche die Bilder jener drei Curvenpunkte sind, die dem Punkte x in den drei centralen Fundamentalinvolutionen entsprechen. Die Berührungspunkte der von o_i an K gelegten zwei Tangenten sind die Bilder der Punkte, in denen die Curve C_4 von den beiden aus d_i an sie gelegten Tangenten berührt wird.

Die von o_i nach d_i' und d_i'' gehenden Strahlen treffen K in zwei Punkten, welche Bilder der Tangentialpunkte des Doppelpunktes d_i von C_4 sind, d. h. jener Punkte, in denen die Curve C_4 von den Tangenten des Doppelpunktes d_i getroffen wird.

Je nachdem die Seite $o_k o_l$ des Dreieckes $o_1 o_2 o_3$ den Kegelschnitt in reellen Punkten schneidet, nicht schneidet oder berührt, ist der Doppelpunkt d_i ein eigentlicher, ein isolirter oder eine Spitze. Wenn d_i ein isolirter Doppelpunkt oder eine Spitze ist, so sind offenbar alle Punkte von $\overline{o_k o_l}$ also auch o_k und o_l

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

ausserhalb K gelegen und werden von ihnen aus an K reelle Tangenten gezogen werden können; d. h.

„Ist einer der drei Doppelpunkte der Curve C_4 ein isolirter Doppelpunkt oder ein Rückkehrpunkt, so gehen von den beiden anderen Doppelpunkten zwei reelle Tangenten an die Curve C_4."

Ist d_i ein Rückkehrpunkt, so fallen die Punkte $d_i' d_i''$ auf K zusammen und eine von den aus o_k und o_l an K gehenden Tangenten fällt mit der Tangente von d_i' zusammen.

Liegt der Punkt o_i auf der Tangente, welche man in einem der beiden Punkte $d_i' d_i''$ an K legen kann, so wird eine Tangente des Doppelpunktes d_i von C_4 zur Inflexionstangente, so dass ihre vier Schnittpunkte mit C_4 in d_i zusammenfallen. Ist o_i der Pol von $o_k o_l$ bezüglich K, so sind beide Tangenten von C_4 in d_i Inflexionstangenten.

Wenn somit die Curve C_4 eine solche ist, dass alle sechs Doppelpunktstangenten zugleich Inflexionstangenten sind, so wird das Dreieck $o_1 o_2 o_3$ ein sich selbst conjugirtes Dreieck bezüglich des Kegelschnittes K.

Bedenkt man, dass von den Ecken eines sich selbst conjugirten Dreieckes immer eine innerhalb und zwei ausserhalb des Kegelschnittes K liegen und dass von den Seiten des Dreieckes zwei den Kegelschnitt in reellen Punkten, die dritte in imaginären Punkten schneidet, so ergibt sich sofort:

„Wenn eine Curve vierter Ordnung drei reelle Punkte zu Doppelpunkten hat und wenn alle Tangenten dieser zugleich Inflexionstangenten sind, so sind von den Doppelpunkten zwei immer eigentliche und der dritte ein isolirter Doppelpunkt. Aus den beiden ersteren gehen reelle Tangentenpaare an die Curve und aus dem letzteren zwei imaginäre Tangenten."

Man sieht auch sofort ein, dass bei einer solchen Curve die drei centralen Fundamentalinvolutionen identisch sind mit den drei nicht centralen Fundamentalinvolutionen.

III. Gerade Punktgruppen der Curve.

Vier Punkte der Curve C_4, welche in einer Geraden liegen bilden eine gerade Punktgruppe (gerades Quadrupel). Eine solche gerade Punktgruppe ist offenbar gegeben durch zwei ihrer Punkte. Alle geraden Gruppen von C_4 bilden somit eine Involution vierten

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Grades und zweiter Stufe und man sieht auch sofort, dass die drei Punktepaare d_i die drei neutralen Elementenpaare dieser Involution darstellen.[1] Die drei centralen Fundamentalinvolutionen sind den drei neutralen Paaren adjungirt.

Gerade, welche durch einen festen Punkt in der Ebene von C_4 hindurchgehen, bestimmen auf der Curve gerade Punktquadrupel, welche eine biquadratische Involution bilden; eine solche wollen wir eine centrale biquadratische Involution auf C_4 nennen. Alle centralen biquadratischen Involutionen auf C_4 haben offenbar die drei Punktepaare d_i gemeinschaftlich, und irgend zwei centrale biquadratische Involutionen besitzen ausser diesen drei gemeinsamen Punktepaaren noch eine ganze gerade Punktgruppe gemeinschaftlich, nämlich jene, welche die Verbindungslinie ihrer Centren auf C_4 bestimmt.

Die sechs Doppelpunkte einer centralen biquadratischen Involution sind die Berührungspunkte der vom Centrum der Involution an die Curve gehenden sechs Tangenten.

Hält man einen Punkt eines geraden Quadrupels fest, so bilden die drei übrigen Punkte eine centrale kubische Involution auf C_4; der feste Punkt ist das Centrum der kubischen Involution. Die vier Doppelelemente sind auch hier die Berührungspunkte der vier aus dem Centrum an die Curve gehenden Tangenten.

Alle centralen kubischen Involutionen haben die drei Punktepaare d_i gemeinschaftlich; je zwei solche Involutionen haben dann ausser diesen drei Punktepaaren noch ein Punktepaar gemeinschaftlich, nämlich jenes, welches das Paar ihrer Centren zu einem geraden Quadrupel ergänzt.

Durch vier Elementenpaare sind zwei kubische Involutionen bestimmt.[2] Betrachtet man die drei Punktepaare d_i als drei von den vier Elementenpaaren und ein beliebiges Punktepaar von C_4 als das vierte, so sieht man sofort, dass die beiden Involutionen dritten Grades jene centralen kubischen Involutionen sind, deren Centra die weiteren zwei Schnittpunkte der Curve C_4 mit der Verbindungslinie des vierten Punktepaares sind.

---

[1] Vergleiche: Über Involutionen $n$ten Grades und $k$ter Stufe. Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. vom 17. April 1879.

[2] Siehe: Grundzüge einer Theorie der kubischen Involutionen. Abhandlung d. k. Gesellschaft d. Wissenschaften. Prag 1874.

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Die beiden cubischen Involutionen werden identisch (fallen zusammen), wenn die Verbindungslinie des vierten Punktepaares eine Tangente der Curve C_4 ist.

„Vier Elementenpaare bestimmen dann nur eine cubische Involution, wenn drei von ihnen als Repräsentanten der Nachbarpunkte der drei Doppelpunkte eine Curve vierter Ordnung und das vierte als Repräsentant zweier auf einer Curventangente liegenden Curvenpunkte auftritt."

Weiter folgt sofort aus dem Früheren:

„Jede auf C_4 befindliche cubische Punktinvolution, welche die drei Punktepaare d_i als Paare entsprechender Punkte enthält, ist eine centrale Involution, d. h. ihre Punktetripel liegen auf Strahlen, welche durch einen festen Punkt der Curve hindurchgehen."

IV. Abbildung gerader Punktgruppen auf einem Kegelschnitte.

Die Grundaufgabe der Abbildung der Curve C_4 auf einen Kegelschnitt K lässt sich so aussprechen:

„Wenn die Abbildung von C_4 auf K fixirt ist, so sollen aus den Bildern zweier Punkte von C_4 die Bilder der beiden anderen Punkte, welche mit den ersteren ein gerades Quadrupel bilden, abgeleitet werden."

Die Bilder der geraden Quadrupel von C_4 bilden selbstverständlich eine biquadratische Involution zweiter Stufe; nach einem allgemeinen Satze über Involutionen höherer Stufe hat man sofort den Satz:

„Die Abbildung der Curve C_4 ist gegeben, wenn man die Bilder dreier geraden Quadrupel kennt". [1]

Hieraus folgt weiter:

„Die Abbildung von C_4 ist gegeben, wenn man die drei Elementenpaare (Punktepaare) kennt, welche die Bilder der drei Doppelpunkte von C_4 sind."

---

[1] Der Satz gilt offenbar auch allgemein für die Abbildung einer ebenen rationalen Curve $n$ter Ordnung.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Denn je zwei solche Paare stellen das Bild eines geraden Quadrupels dar. Für biquadratische Involutionen zweiter Stufe lautet der letzte Satz:

Eine biquadratische Involution zweiter Stufe ist durch ihre drei neutralen Elementenpaare bestimmt."

Es sei also in der Ebene des Kegelschnittes K, auf welchen wir die Curve C_4 abbilden, das Dreieck $o_1 o_2 o_3$ gegeben, resp. willkürlich angenommen; die Seiten dieses (Fundamental-) Dreieckes schneiden K in den Bildern der drei Doppelpunkte $d_1 d_2 d_3$ von C_4, und zwar liegen auf den Seiten $o_2 o_3$, $o_3 o_1$, $o_1 o_2$ resp. die Punktepaare $d_1' d_1''$, $d_2' d_2''$, $d_3' d_3''$. Es sei nun x ein beliebiger Punkt von C_4, dessen Bild auf K wir kurz auch mit x bezeichnen wollen; die durch x gehenden Strahlen treffen C_4 in Punktetripeln einer cubischen Involution, für welche wir drei Gruppen angeben können.

Der Strahl $x d_i$ trifft nämlich C_4 in einem Punkte x_i, welcher mit dem Punktepaare d_i zusammen ein Tripel der cubischen Involution darstellt. Gehen wir nun auf den Kegelschnitt K über, so werden die Strahlen $x o_i$ K in den Bildern x_i schneiden und wir haben für das Bild der centralen cubischen Involution, deren Centrum x auf C_4 ist, die drei Punktetripel auf K: $x_1 d_1 d_1'$; $x_2 d_2' d_2''$; $x_3 d_3' d_3''$. Jedes andere Tripel dieser cubischen Involution auf K stellt die Bilder dreier Punkte von C_4 dar, welche mit x in gerader Linie liegen.

Diese cubische Involution auf K wird aber durch ein Kegelschnittbüschel herausgeschnitten, welches $o_1 o_2 o_3$ und x zu Scheiteln hat;[1] denn die oben genannten drei Tripel rühren von den drei Gegenseitenpaaren des vollständigen Viereckes $o_1 o_2 o_3$ x her.

Man erhält somit die Bilder dreier Punkte $x' x'' x'''$, welche mit x ein gerades Quadrupel bilden, als Schnittpunkte von K mit einem Kegelschnitte, welcher durch x hindurchgeht und dem Dreieck $o_1 o_2 o_3$ umschrieben ist. Oder also:

„Die dem Fundamentaldreieck $o_1 o_2 o_3$ umschriebenen Kegelschnitte schneiden K in Punktequadrupeln, welche Bilder gerader Quadrupel der Curve C_4 sind."

[1] Siehe: Grundzüge einer Theorie cubischer Involutionen, Art. 33 und 34.

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Wenn somit xx' die Bilder zweier Punkte von C_4 sind, so erhält man die Bilder $x''x'''$ der beiden Punkte, in denen C_4 von der Verbindungslinie der beiden ersten geschnitten wird, als Schnittpunkte von K mit dem durch $o_1 o_2 o_3 xx'$ gehenden Kegelschnitte. Man kann $x''x'''$ als Doppelpunkte der beiden projectivischen Systeme definiren, welche man erhält, wenn man $o_1 o_2 o_3$ aus x und x' auf K projicirt. Das Resultat dieser Projection sind die beiden Punktetripel $x_1 x_2 x_3$ und $x'_1 x'_2 x'_3$ und obige Projectivität ist durch die drei Punktepaare $x_1 x'_1$, $x_2 x'_2$, $x_3 x'_3$ bestimmt. Construirt man den Schnitt ξ_3 von $x_1 x'_2$ mit $x_2 x'_1$; ebenso ξ_1 als Schnitt von $x_2 x'_3$ mit $x_3 x'_2$ und schliesslich ξ_2 als Schnittpunkt von $x_3 x'_1$, mit $x_1 x'_3$ so liegen nach dem Satze von Pascal die Punkte ξ_1, ξ_2, ξ_3 in den Seiten $o_2 o_3$, $o_3 o_1$, $o_1 o_2$ resp. und überdies in einer Geraden, welche den Kegelschnitt in den gesuchten zwei Punkten x'' x''' schneidet.

Man kann somit die geometrische Beziehung zwischen den vier Punkten eines geraden Quadrupels auf der Curve folgendermassen definiren:

„Projicirt man zwei Punkte eines geraden Quadrupels aus den drei Doppelpunkten von C_4 wieder auf die Curve und ordnet den Projectionen des eines Punktes der Reihe nach die Projectionen des anderen Punktes projectivisch zu, so sind die übrigen zwei Punkte des Quadrupels die Doppelelemente der projectivischen Beziehung."

Zu den beiden Punkten $x''x'''$ kann man auch noch auf andere Arten gelangen.

Die centrale cubische Involution x (d. h. jene, welche durch das Strahlenbüschel x auf C_4 bestimmt wird) bildet sich, wie wir gesehen haben, auf K ab, als jene cubische Involution, welche durch das Kegelschnittbüschel $o_1 o_2 o_3 x$ auf K bestimmt wird. [1] Der zugehörige Involutionskegelschnitt ist nicht nur den Dreiecken $x_1 d'_1 d''_1$, $x_2 d'_2 d''_2$, $x_3 d'_3 d''_3$, sondern offenbar auch immer dem Fundamentaldreieck $o_1 o_2 o_3$ eingeschrieben. In dieser Art ist jedem Punkte x von K ein dem Dreiecke $o_1 o_2 o_3$ eingeschriebener

[1] Es kann offenbar keinem Zweifel unterliegen, wenn man einen Punkt x als auf C_4 liegend und wenn man ihn als Bild auf K zu betrachten hat.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Involutionskegelschnitt J_x zugeordnet; jedes dem letzteren umschriebene und dem K eingeschriebene Dreieck liefert (in seinen Ecken) die Bilder dreier mit x in gerader Linie liegender Punkte von C_4. Es ist nun klar, dass die ausser den Seiten des Dreieckes $o_1 o_2 o_3$ noch auftretende vierte gemeinschaftliche Tangente der beiden den Punkten xx' zugeordneten Involutionskegelschnitte den Träger K in den Bildern $x''x'''$ schneidet.

V. Tangenten, Doppeltangenten und Wendetangenten der Curve C_4.

Legt man im Punkte x an C_4 die Tangente, so wird sie die Curve in den beiden Tangentialpunkten yy' von x schneiden; da die drei Punkte xyy' offenbar auch ein Tripel der centralen Involutionen, deren Centrum x ist, darstellen, so wird man die Bilder von yy' als Schnittpunkte von K mit den von x aus an J_x gehenden zwei Tangenten erhalten.

Betrachtet man wie früher die Bilder yy' als Doppelelemente der beiden (in diesem Falle unendlich nahen) projectivischen Punktsysteme auf K, so ergibt sich die Gerade $\overline{yy'}$ als Perspectivitätsaxe des Dreieckes $o_1 o_2 o_3$ und jenes Dreieckes, welches man erhält, wenn man $o_1 o_2 o_3$ von x aus auf den Kegelschnitt K projicirt.

Schliesslich ist, wie aus Früherem folgt yy' das Punktepaar, in welchem K von jenem Kegelschnitte geschnitten wird, welcher dem Fundamentaldreieck $o_1 o_2 o_3$ umschrieben ist und den Kegelschnitt K im Punkte x berührt.

Da die vier Punktepaare d_1, d_2, d_3, yy' auf C_4 eine solche Lage haben, dass sie nur eine cubische Involution bestimmen, nämlich jene centrale Involution, deren Centrum der Punkt x ist, so gilt dasselbe von den vier Punktepaaren $d_1' d_1''$, $d_2' d_2''$, $d_3' d_3''$, yy' auf dem Kegelschnitte K und da man irgend drei von diesen vier Paaren als Bilder der drei Doppelpunkte einer ebenen Curve vierter Ordnung betrachten kann, so hat man auf Grund der angeführten Construction von yy' den folgenden Satz:

„Wenn vier Sehnen eines Kegelschnittes K so beschaffen sind, dass der Kegelschnitt, welcher dem von drei Sehnen bestimmten Dreieck umgeschrieben ist und durch die Endpunkte der vierten Sehne hindurchgeht, den Kegelschnitt K berührt, so ist diese Eigenschaft involutorisch, d. h. es geht dann durch die End-

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

punkte jeder der vier Sehnen und durch die Ecken der von den drei anderen gebildeten Dreieckes ein Kegelschnitt, welcher den Kegelschnitt K an einer gewissen Stelle berührt."

„Die Endpunkte solcher vier Sehnen sind vier Punktepaare, durch welche nur eine cubische Involution (oder eigentlich zwei zusammenfallende Involutionen) bestimmt ist."

Man kann also auch sagen:

„Wenn sich zwei Kegelschnitte in einem Punkte berühren, so bestimmen die drei Seiten eines dem einen Kegelschnitte eingeschriebenen Dreieckes auf dem anderen Kegelschnitte drei Punktepaare, welche mit dem Paare der ausser dem Berührungspunkte auftretenden Schnittpunkten beider Kegelschnitte nur eine einzige cubische Involution bestimmen."

„Der Berührungspunkt beider Kegelschnitte ergänzt das Schnittpunktepaar derselben zu einem Tripel der einzigen Involution."

Die Bilder der Berührungspunkte der vier vom Punkte x aus an die Curve C_4 gehenden Tangenten erhält man als Berührungspunkte von K mit den vier diesem Kegelschnitte und dem Involutionskegelschnitte I_x gemeinschaftlichen Tangenten.

Nachdem die Bilder gerader Punktgruppen als Schnitte des Fundamentalkegelschnittes K mit den dem Dreieck $o_1o_2o_3$ umschriebenen Kegelschnitten entstehen, ist es sofort klar, dass man die Bilder der Berührungspunkte einer Doppeltangente erhält als Berührungspunkte von K mit einem diesen Kegelschnitt doppelt berührenden und dem Dreieck $o_1o_2o_3$ umschriebenen Kegelschnitte.

Es gibt nun bekanntlich vier Kegelschnitte $D_1D_2D_3D_4$, welche dem Dreieck $o_1o_2o_3$ umgeschrieben sind und den Kegelschnitt K berühren; ihre Berührungspunktepaare $\delta_1'\delta_1''$, $\delta_2'\delta_2''$, $\delta_3'\delta_3''$, $\delta_4'\delta_4''$ mit K sind die Bilder der Berührungspunkte der vier Doppeltangenten $\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4$ der Curve C_4.

Die Punkte δ sind in bekannter Weise construirbar. Legt man nämlich von $o_1o_2o_3$ an K die drei Tangentenpaare, so kann man ihre drei Berührungspunktepaare $\alpha_1'\alpha_1''$, $\alpha_2'\alpha_2''$, $\alpha_3'\alpha_3''$ in vier verschiedenen Arten projectivisch aufeinander beziehen.

Die Doppelelemente dieser vier Projectivitäten sind die Punkte δ.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Erste Projectivität:

Den Punkten $\alpha'_1 \alpha'_2 \alpha'_3$ entsprechen projectivisch $\alpha''_1 \alpha''_2 \alpha''_3$; Doppelpunkte $\delta'_1 \delta''_1$.

Zweite Projectivität:

Den Punkten $\alpha''_1 \alpha'_2 \alpha'_3$ entsprechen projectivisch $\alpha'_1 \alpha''_2 \alpha''_3$; Doppelpunkte $\delta'_2 \delta''_2$.

Dritte Projectivität:

Den Punkten $\alpha'_1 \alpha''_2 \alpha'_3$ entsprechen projectivisch $\alpha''_1 \alpha'_2 \alpha''_3$; Doppelpunkte $\delta'_3 \delta''_3$.

Vierte Projectivitat:

Den Punkten $\alpha'_1 \alpha'_2 \alpha''_3$ entsprechen projectivisch $\alpha''_1 \alpha''_2 \alpha'_3$; Doppelpunkte $\delta'_4 \delta''_4$. Nun sind die Punkte $\alpha'_i \alpha''_i$ die Bilder der Berührungspunkte der beiden vom Punkte d_i an die Curve C_4 gelegten Tangenten.

Wir haben somit den Satz:

„Legt man aus den drei Doppelpunkten einer ebenen Curve vierter Ordnung die drei Tangentenpaare an die Curve und lässt man die Berührungspunkte eines jeden Paares einander projectivisch entsprechen so liefern die drei Berührungspunktepaare vier projectivische Punktsysteme auf der Curve. Die Berührungspunkte jeder der vier Doppeltangenten der Curve sind die Doppelpunkte eines jener vier projectivischen Punktsysteme.“

Die vier Berührungssehnen $\delta'_i \delta''_i$ der vier Kegelschnitte D_i mit dem Kegelschnitte K erhält man bekanntich auch in folgender Weise:

Auf jeder Seite des Fundamentaldreieckes $o_1 o_2 o_3$ hat man zwei Punktepaare nähmlich ein Eckenpaar $o_k o_l$ und das Punktepaar $d' d''$; diese beiden Paare besitzen ein gemeinschaftliches harmonisches Punktepaar. Solche erhält man also drei; ihre sechs Punkte liegen viermal zu dreien in den vier Sehnen $\delta' \delta''$, indem sie die sechs Ecken des von diesen Sehnen gebildeten vollständigen Vierseits sind.

Da durch jede Ecke dieses Vierseits zwei von den Sehnen $\delta' \delta''$ und eine Seite des Dreieckes $o_1 o_2 o_3$, und durch die gegenüberliegende Ecke des Vierseits dieselbe Dreieckseite und die

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

beiden übrigen Sehnen hindurchgehen,[1] so haben wir den Satz: „Die beiden Punktepaare in denen zwei Doppeltangenten die Curve C_4 berühren, bestimmen eine quadratische Punktinvolution; die Berührungspunktepaare der beiden anderen Doppeltangenten bestimmen eine zweite solche Involution und für diese beiden Involutionen stellen die Nachbarpunkte eines der drei Doppelpunkte das gemeinschaftliche Elementenpaar vor.“ Wenn man also in dieser Art eine der vier Doppeltangenten der Reihe nach mit den drei anderen zu Paaren verbinde, so treten der Reihe nach die drei Doppelpunkte der Curve in obigem Satze auf.

Legt man durch $o_1 o_2 o_3$ einen Kegelschnitt, welcher K in einem Punkte osculirt und somit noch in einem Punkte schneidet, so ist offenbar der erstere das Bild eines Wendepunktes der Curve C_4 und letzterer ist das Bild des Schnittpunktes der Curve mit der zugehörigen Wendetangente.

„Die Osculationspunkte der sechs durch $o_1 o_2 o_3$ gehenden und K osculirenden Kegelschnitte sind die Bilder der sechs Wendepunkte der Curve C_4.“

VI. Fundamental-Involutionen zweiter und höherer Ordnung auf der Curve C_4.

Die sechs Inflexionspunkte der Curve C_4 kann man auch als Doppelelemente einer biquadratischen Punktinvolution auf C_4 definiren, resp. die sechs Wendetangenten als Doppelelemente eines solchen (der zugehörigen) Tangenteninvolution.

Die vier Doppeltangenten $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4$ von C_4 bilden ein Vierseit, welchem eine Kegelschnittsreihe eingeschrieben werden kann; jeder Kegelschnitt der Reihe hat mit der Curve C_4, welche von der sechsten Classe ist, zwölf gemeinschaftliche Tangenten, ausser den vier Doppeltangenten also noch vier weitere einfache. Die Tangentenquadrupel von C_4, die man so erhält, bilden offenbar eine biquadratische Tangenteninvolution und ebenso leicht ist einzusehen, dass die sechs Doppelelemente derselben die sechs Inflexionstangenten von C_4 sind. Berücksichtigt man die in der Kegelschnittsreihe vorkommenden drei degenerirten Kegelschnitte

[1] Das Fundamentaldreieck $o_1 o_2 o_3$ ist offenbar das Diagonaldreiseit des vollständigen Sehnenvierseits $\delta_i' \delta_i''$.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

(Punktepaare), so erkennt man dass sich drei Quadrupel der biquadratischen Involution sofort angeben lassen. Die vier Doppeltangenten Δ bilden ein vollständiges Vierseit mit drei Gegeneckenpaaren; aus jeder Ecke lassen sich an die Curve C_4 (ausser den beiden Doppeltangenten noch) zwei Tangenten an die Curve legen, welche mit den durch die Gegenecke gehenden zwei Tangenten ein Quadrupel der Tangenteninvolution darstellen; in dieser Art liefern die drei Gegeneckenpaare des Vierseits Δ drei Tangentenquadrupel der biquadratischen Involution auf C_4, deren Doppelelemente die Wendetangenten der Curve sind.

Man kann diese biquadratische Involution, resp. die Involution der zugehörigen Berührungspunkte leicht auf dem Kegelschnitte K fixiren, wie wir bald zeigen wollen.

Die sechs Inflexionstangenten $I_1 I_2 I_3 I_4 I_5 I_6$ sind auch als Doppeltangenten der Curve C_4 aufzufassen; wenn man also unter den vier Doppeltangenten Δ und den sechs Wendetangenten I irgend vier zu einem Vierseit verbindet und diesem eine Kegelschnittsreihe einschreibt, so bestimmt jeder Kegelschnitt mit der Curve C_4 (ausser den gemeinschaftlichen Doppel- und Inflexionstangenten noch) vier gemeinschaftliche Tangenten; und alle diese Tangentenquadrupel, sowie auch ihre Berührungspunktegruppen bilden auf C_4 biquadratische Involutionen.

Hat man p von den Inflexionstangenten und somit $(4-p)$ von den Doppeltangenten zu Tangenten der Kegelschnittsreihe gewählt, so sind die Berührungspunkte der übrigen $(6-p)$ Inflexionstangenten Doppelpunkte der biquadratischen Berührungspunkteinvolution auf C_4 und die übrigen p Doppelpunkte dieser Involution sind Berührungspunkte von C_4 mit p Kegelschnitten der Reihe. Aus jeder Ecke des festen Tangentenvierseits gehen ausser den Doppel-, resp. Inflexionstangenten noch zwei Tangenten von C_4; die beiden aus zwei Gegenecken des Vierseits auslaufenden Tangentenpaare resp. ihre Berührungspunkte, bilden ein Quadrupel der besprochenen biquadratischen Involution. (Solcher biquadratischer Involutionen gibt es 210 auf der Curve C_4.)

Die zehn Geraden Δ und I nämlich die vier Doppeltangenten und die sechs Inflexionstangenten geben noch zu einer Reihe von quadratischen Involutionen auf der Curve Veranlassung, welche man auch als fundamentale Involution bezeichnen könnte.

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Wählt man von den zehn Geraden ΔI beliebige acht, so bestimmen sie als Tangenten eine Curvenreihe dritter Classe, jede dieser Curven hat mit C_4 3×6, d. i. achtzehn Tangenten gemeinschaftlich. Da die acht festen Tangenten jede für zwei gemeinsame gilt, so bleiben nur zwei variable gemeinschaftliche Tangenten, welche offenbar einer quadratischen Involution auf C_4 angehören:

„Wählt man acht beliebige unter den vier Doppel- und den sechs Inflexionstangenten von C_4, so bestimmen sie als Tangenten eine Curvenreihe dritter Classe, deren Curven mit C_4 gemeinschaftliche Tangentenpaare besitzen, welche eine quadratische Involution auf C_4 bilden."

Wenn von den zehn Geraden ΔI acht als feste Tangenten herausgenommen werden so bleiben noch zwei übrig; diese können entweder beide Doppeltangenten sein, oder beide Inflexionstangenten, oder aber eine von ihnen ist eine Wendetangente und die andere eine Doppeltangente.

Sind beide Doppeltangenten, so wird jede von ihnen von einer Curve der Reihe berührt und stellen dann ihre Nachbartangenten das der Curve der Reihe entsprechende Tangentenpaar der quadratischen Involution dar. Es gilt also der Satz:

„Die Berührungspunktepaare zweier Doppeltangen der Curve C_4 bestimmen auf der Curve eine quadratische Involution; die beiden Curventangenten in irgend einem Punktepaare dieser Involution, die beiden übrigen Doppeltangenten und die sechs Inflexionstangenten berühren eine und dieselbe Curve dritter Classe."

Wenn die beiden übrig gebliebenen festen Tangenten Wendetangenten sind, so wird wieder jede von einer Curve der Reihe dritter Classe berührt, und offenbar ist diese Wendetangente ein Doppelelement der quadratischen Tangenteninvolution. Hieraus folgt:

„Wenn zwei Punkte der Curve C_4 von zwei Inflexionspunkten harmonisch getrennt werden, so berühren ihre Tangenten, dann die Tangenten der übrigen vier Inflexionspunkte und die vier Doppeltangenten eine und dieselbe Curve dritter Classe."

Für den dritten Fall erhält man ein ganz ähnliches Resultat; übrigens kann man alle drei Fälle in einem zusammenfassen, wenn man die Berührungspunkte der Inflexionstangenten als Doppel-

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

elemente und die zwei Berührungspunkte einer Doppeltangente als ein Paar von Elementen zur Bestimmung quadratischer Involutionen betrachtet. Der Satz lautet so:

„Die Berührungselemente irgend zweier von den zehn Geraden ΔI bestimmen auf C_4 eine quadratische Punktinvolution; die übrigen acht von den zehn Geraden und die Curventangenten in irgend zwei Punkten eines Paares jener Involution sind zehn Tangenten einer und derselben Curve dritter Classe."

Die Zahl dieser quadratischen Involutionen ist 45.

VII. Allgemeine quadratische Involution auf C_4.

„Kegelschnitte, welche durch die drei Doppelpunkte $d_1 d_2 d_3$ von C_4 und durch einen der Curve nicht angehörigen Punkt p hindurchgehen, bestimmen auf C_4 Punktepaare einer quadratischen Involution; und umgekehrt, gehen die Kegelschnitte, welche man durch die drei Doppelpunkte $d_1 d_2 d_3$ und die Punktepaare einer auf C_4 befindlichen quadratischen Punktinvolution hindurchlegen kann, alle durch einen festen Punkt p der Ebene der Curve."

Den ersten Theil des Satzes sieht man sofort ein, wenn man erwägt, dass ein Kegelschnitt die Curve C_4 in acht Punkten trifft von denen, wenn er durch die drei Doppelpunkte geht sechs in diesen Punkten festgehalten werden, so dass nur ein Paar variabler Schnittpunkte zurückbleibt. Auch den zweiten Theil des Satzes beweist man leicht in folgender Art. Es sei auf C_4 eine beliebige quadratische Punktinvolution gegeben; aa', bb' seien zwei beliebige Punktepaare der Involution. Die zwei Kegelschnitte, welche durch die beiden 5punktigen Gruppen $d_1 d_2 d_3\, aa'$ $d_1 d_2 d_3\, bb'$ gegeben sind, werden sich in einem vierten Punkte p schneiden und nun sieht man, da eine Involution durch zwei Elementenpaare bestimmt ist, dass die dem Viereck $d_1 d_2 d_3\, p$ umschriebenen Kegelschnitte die Curve C_4 in Punktepaaren unserer Involution zweiten Grades schneiden werden.

In dieser Art entspricht also jeder quadratischen Punktinvolution auf C_4 ein bestimmter Punkt p in der Ebene der Curve und jedem Punkte p entspricht eine auf C_4 befindliche quadratische Punktinvolution.

Berücksichtigt man die drei in dem Büschel $(d_1 d_2 d_3\, p)$ auftretenden degenerirten Kegelschnitte, so ergibt sich sofort, dass

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

die drei Strahlen d_1p, d_2p, d_3p die Curve C_4 in drei Punktepaaren unserer Involution treffen. Oder auch:

„Verbindet man einen beliebigen ausserhalb der Curve liegenden Punkt p mit den drei Doppelpunkten der Curve, so schneiden die drei erhaltenen Strahlen die Curve in drei Punktepaaren, welche einer und derselben quadratischen Involution angehören."

Diese drei Punktepaare sind offenbar Punktepaare unserer Involution, welche der Reihe nach auch den drei centralen quadratischen Fundamentalinvolutionen angehören.

Denkt man sich den Punkt p als Schnittpunkt zweier Tangenten der Curve, von denen jede aus einem Doppelpunkte an die Curve gelegt wurde, so hat man sofort den Satz:

„Legt man aus einem der drei Doppelpunkte d_i eine Tangente an die Curve und ebenso aus einem zweiten, und verbindet man den Schnittpunkt p der beiden Tangenten mit dem dritten Doppelpunkte, so schneidet die erhaltene Gerade die Curve C_4 in zwei Punkten, welche auf der Curve die Berührungspunkte der beiden Tangenten harmonisch trennen."

Die letzteren Punkte sind nämlich die Doppelelemente der dem p entsprechenden quadratischen Punktinvolution. Unter den Curven des Kegelschnittbüschels $d_1 d_2 d_3 p$ gibt es zwei, welche die Curve C_4 berühren und zwar sind die Berührungspunkte offenbar die Doppelpunkte der durch das Büschel auf C_4 bestimmten quadratischen Involution.

Betrachtet man eine nicht centrale quadratische Fundamentalinvolution, etwa jene, welche die Nachbarpunkte von d_i zu Doppelementen hat, so werden die beiden diesen Punkten entsprechenden Kegelschnitte jene sein, welche durch $d_1 d_2 d_3$ gehend in d_i die Curve C_4 osculiren; ihr Schnittpunkt p_i entspricht dieser Fundamentalinvolution.

Ausser den centralen und nicht centralen Fundamentalinvolutionen scheinen noch drei, welche wir die gemischten Fundamentalinvolutionen zweiten Grades nennen wollen, eine Bedeutung für die Curve C_4 zu haben. Jeder der drei Doppelpunkte d_i liefert eine solche Involution. Legt man nämlich von d_i an die Curve C_4 beiden Tangenten und sind $a_i a_i$ ihre Berührungspunkte, so wird durch die beiden Punktepaare $d_i a_i$ eine gemischte quadratische Fundamentalinvolution auf C_4 bestimmt, nämlich die dem Doppelpunkte d_i entsprechende.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Geht man zur Abbildung von C_4 auf K zurück, so liegen die Punktepaare $a_i' a_i''$ auf den Polaren der Punkte o_i bezüglich K (und auf K selbstverständlich). Das Dreieck $\overline{a_i' a_i''}$ ist also polarreciprok zu dem Dreiecke $o_1 o_2 o_3$ bezüglich K und da zwei Polardreiecke immer perspectivisch sind, d. h. weil die drei Schnitte von $\overline{a_i' a_i''}$ mit $\overline{o_k o_l}$ in einer Geraden g liegen, so haben die drei quadratischen Involutionen, welche durch die Punktepaare $d_i d_i'$, $a_i' a_i''$ bestimmt sind ein gemeinschaftliches Punktepaar. Diese Involutionen sind aber die Bilder der drei gemischten Fundamentalinvolutionen der Curve C_4. Wir haben also den Satz:

„Die drei gemischten quadratischen Fundamentalinvolutionen der Curve C_4 haben ein gemeinschaftliches Elementenpaar, so dass also die diesen drei Involutionen entsprechenden drei p-Punkte mit den drei Doppelpunkten der Curve auf einem und demselben Kegelschnitte liegen."

Dieser Kegelschnitt schneidet C_4 in dem den drei Involutionen gemeinschaftlichen Punktepaare; es scheint, dass dieses Punktepaar für die Curve C_4 von fundamentaler Bedeutung ist.

VIII. Begleitende symmetrische Punktsysteme zweiten Grades.

Wird auf C_4 ein Punktepaar xx' beliebig gewählt, so erscheint zugleich ein zweites Punktepaar $\xi\xi'$ gegeben, nämlich das Paar der weiteren Schnittpunkte der Curve mit der Geraden $\overline{xx'}$; wir wollen das Paar $\xi\xi'$ als das begleitende Punktepaar von xx' bezeichnen. Selbstverständlich ist xx' das begleitende Punktepaar von $\xi\xi'$. Im Allgemeinen sind zwei Punktepaare gegenseitig sich begleitende, wenn sie zusammen ein gerades Punktquadrupel der Curve bilden.

Die sämmtlichen Punktepaare einer centralen quadratischen Involution sind offenbar begleitende Punktepaare des zugehörigen Doppelpunktes der Curve. In der That sind die drei Punktepaare d_i die einzigen, welche von unendlich vielen Paaren begleitet erscheinen.

Denken wir uns nun auf C_4 eine beliebige quadratische Punktinvolution; jedes Punktepaar xx' der Involution wird von einem Punktepaare $\xi\xi'$ auf C_4 begleitet und es wirft sich die Frage auf, was die sämmtlichen begleitenden Paare $\xi\xi'$ bilden. Wählt

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

man ξ beliebig auf C_4, so bestimmen die durch ξ gehenden Strahlen auf C_4 eine (centrale) cubische Involution, welche mit der gegebenen quadratischen (3—1)(2—1) d. i. zwei Elementenpaare gemeinschaftlich hat; sind xx' $x_1x'_1$ diese Elementenpaare, so gehen also die Geraden xx', $x_1x'_1$ durch ξ hindurch und schneiden C_4 in zwei Punkten ξ', ξ'', so dass $\xi\xi'$ das Paar xx' und $\xi\xi''$ das Paar $x_1x'_1$ der gegebenen quadratischen Involution begleiten.

„Es kommt folglich jeder Punkt ξ von C_4 in zwei begleitenden Paaren vor, d. h. die Punktepaare $\xi\xi'$, welche die Paare xx' einer quadratischen Involution auf C_4 begleiten, bilden ein symmetrisches Punktsystem zweiten Grades. Wir wollen dasselbe als das die quadratische Involution begleitende symmetrische Punktsystem bezeichnen."

Die Enveloppe der Geraden $\overline{xx'}$ (welche zugleich auch Enveloppe der Geraden $\xi\xi'$ ist) ist eine Curve dritter Classe; denn durch einen beliebigen Punkt der Ebene gehen drei ihrer Tangenten, weil die biquadratische (centrale) Involution, welche durch Strahlen, die den Punkt enthalten, auf C_4 bestimmt wird, mit der gegebenen quadratischen Involution (2—1)(4—1), d. i. drei gemeinschaftliche Punktepaare besitzt. Die durch irgend einen Punkt und C_4 gehenden drei Tangenten verbinden diesen Punkt mit dem ihm involutorisch entsprechenden und dann mit den zwei Punkten $\xi'\xi''$, welche ihm in dem die Involution begleitenden symmetrischen Punktsystem als entsprechende zugeordnet sind.

Wenn eine quadratische Involution sich mit einem symmetrischen Elementensystem zweiten Grades auf demselben Träger befindet, so haben beide zwei gemeinschaftliche Elementenpaare.[1] Es sei nun $\gamma\gamma'$ eines dieser beiden Punktepaare, welche der Involution und dem begleitenden System gemeinschaftlich sind. Weil $\gamma\gamma'$ ein Paar des letzteren Systemes ist, so wird die Gerade $\gamma\gamma'$ die Curve in einem Punktepaare $\gamma_1\gamma'_1$ der Involution schneiden und man sieht nun sofort, dass $\gamma_1\gamma'_1$ das zweite der Involution und dem System gemeinsame Punktepaaren ist.

„Die beiden Punktepaare, welche einer quadratischen Involution auf C_4 und dem sie begleitenden symmetrischen Systeme gemeinschaftlich sind, bilden ein gerades Punktquadrupel."

[1] Siehe: Beiträge zur Curvenlehre, A. Hölder, Wien, 1880. Art. 25.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Hieraus folgt weiter, dass die Gerade, welche dieses Quadrupel enthält, eine Doppeltangente der Involutionscurve dritter Classe ist.

„Die Involutionscurve einer quadratischen, auf C_4 befindlichen Punktinvolution (d. h. die Eingehüllte aller Verbindungslinien entsprechender Punkte) ist eine Curve dritter Classe mit einer Doppeltangente; die Doppeltangente enthält die beiden Punktepaare, welche der Involution und dem sie begleitenden symmetrischen Punktsystem zweiten Grades gemeinschaftlich sind."

Offenbar ist diese Involutionscurve zugleich die Directionscurve des begleitenden Systemes als Enveloppe der Verbindungslinien entsprechender Punkte des Systemes.

Ist p der vierte Scheitel des Kegelschnittbüschels, welcher auf C_4 die Involution bestimmt, so sind pd_1, pd_2, pd_3 die drei durch p gehenden Tangenten der Involutionscurve.

Jedem Punkte p in der Ebene der Curve entspricht eine quadratische Punktinvolution auf C_4 (bestimmt durch die Kegelschnitte des Büschels $d_1 d_2 d_3 p$) und folglich eine gewisse Gerade als Doppeltangente der zugehörigen Involutionscurve; umgekehrt entsprechen jeder Lage dieser Doppeltangente drei p-Punkte. Denn sind $abcd$ etwa die vier Schnittpunkte der Curve C_4 mit der als Doppeltangente der Involutionscurve angenommenen Geraden, so kann man die Involutionen auf C_4 herstellen, welche der Reihe nach durch die Paare ab, cd, ac, bd, ad, bc bestimmt erscheinen und deren Involutionscurven die Gerade $(abcd)$ zur gemeinschaftlichen Doppeltangente besitzen.

Schneidet man C_4 mit einer beliebigen Geraden G in vier Punkten und gruppirt sie zu zwei Paaren, etwa aa', bb', welche man als zwei Punktepaare der quadratischen Involution auf C_4 betrachtet, so ist hiedurch die Involution und somit auch die Involutionscurve, welche G zur Doppeltangente besitzt, bestimmt. Legt man durch $d_1 d_2 d_3 aa'$ den Kegelschnitt A_2, und durch $d_1 d_2 d_3 bb'$ den Kegelschnitt B_2, so schneiden sich dieselben noch in einem vierten Punkte, dem der Involution entsprechenden Punkte p; jeder durch $d_1 d_2 d_3 p$ gehende Kegelschnitt X_2 trifft C_4 in einem weiteren Punktepaare xx' der Involution. Die Gerade $\overline{xx'}$ umhüllt die Involutionscurve und trifft die Doppeltangente G

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

in einem Punkte x_1, welcher eine mit der Tangentenreihe $\overline{xx'}$ projectivische Punktreihe auf G beschreibt; die Tangentenreihe $\overline{xx'}$ ist offenbar auch projectivisch mit dem Kegelschnittbüschel X_2 und insbesondere entsprechen die Kegelschnitte $A_2 B_2$ den beiden Nachbartangenten der Doppeltangente G. Das Büschel X_2 ist weiter projectivisch mit seinem Tangentenbüschel in einem der vier Scheitel, z. B. in p.

Nun bestimmt der Kegelschnitt, welcher durch das Geradenpaar $d_2 d_3$, pd_1 dargestellt ist, ein Punktepaar auf C_4, dessen Verbindungslinie pd_1 ist und zugleich ist pd_1 die Tangente dieses Kegelschnittes in p; dasselbe gilt von pd_2, pd_3.

„Es ist somit die Punktreihe x_1 perspectivisch mit dem Büschel der Tangenten am Scheitel p, d. h. legt man durch $pd_1 d_2 d_3$ einen Kegelschnitt X_2, welcher C_4 in einem Punktepaare xx' trifft, so schneidet die Gerade xx' die an X_2 in p gelegte Tangente in einem auf G liegenden Punkte x."

Mit anderen Worten:

„Die Sehnen, welche der Curve C_4 und den durch die drei Doppelpunkte $d_1 d_2 d_3$ und irgend einem vierten Punkt p gehenden Kegelschnitten gemeinschaftlich sind, schneiden die in p an die respectiven Kegelschnitte gelegten Tangenten in Punkten eines festen Geraden G, welche Doppeltangente der von den Sehnen umhüllten Curve dritter Classe ist."

Hieraus folgt sofort:

„Die in p an die beiden Kegelschnitte $A_2 B_2$ gelegten Tangenten treffen die Doppeltangente G in deren Berührungspunkten."

Wenn die drei Doppelpunkte von C_4 reelle Punkte sind, so haben alle Involutionscurven quadratischer Punktinvolutionen auf C_4 eigentliche Doppeltangenten; ebenso wenn nur einer der drei Doppelpunkte reell ist.

Wir haben gesehen, dass jede auf C_4 befindliche quadratische Punktinvolution von einem symmetrischen Punktsystem zweiten Grades begleitet wird.

„Alle begleitenden Punktsysteme zweiten Grades haben die drei Punktepaare d_i gemeinschaftlich."

In der That tritt jedes Punktepaar d_i als begleitendes Paar jenes Involutionspaares auf, welches auch der centralen Fundamentalinvolution d_i angehört.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Daher ist auch ein begleitendes System durch zwei Punktepaare bestimmt, während ein symmetrisches Elementensystem zweiten Grades durch fünf beliebig zu wählende Elementenpaare bestimmt erscheint. Nimmt man zwei Punktepaare $\xi\xi'$, $\eta\eta'$ auf C_4 für das begleitende System an, so ist es durch die fünf Punktepaare $d_1 d_2 d_3$ $\xi\xi'$ $\eta\eta'$ vollkommen gegeben; in der That bestimmen die beiden Punktepaare xx', yy', welche die zwei Paare $\xi\xi'$, $\eta\eta'$ begleiten, jene quadratische Involution, für welche das symmetrische System das begleitende ist. Hieraus folgt auch:

„Jedes symmetrische Punktsystem zweiten Grades auf C_4, welchem auch die drei Punktepaare d_i angehören, begleitet eine quadratische Involution, d. h. die Verbindungslinien entsprechender Punkte des Systems schneiden C_4 in Punktepaaren einer quadratischen Involution."

Bildet man die Curve C_4 mit allen begleitenden quadratischen Systemen auf den Kegelschnitt K ab, so werden die Directionskegelschnitte aller der begleitenden (Bild—) Systeme dem Dreieck $o_1 o_2 o_3$ eingeschrieben sein und umgekehrt bestimmt jeder diesem Dreieck eingeschriebene Kegelschnitt als Directionscurve aufgefasst ein begleitendes Punktsystem.

Dies gibt nebenbei auch den folgenden Kegelschnittsatz:

„Wenn von zwei conjugirten gemeinschaftlichen Sehnen zweier Kegelschnitte,[1] von denen der eine fest und der andere einem festen Dreieck umgeschrieben ist, die eine einen dem Dreieck eingeschriebenen festen Kegelschnitt berührt, so geht die andere durch einen festen Punkt und umgekehrt." Jede cubische Involution ist ein specieller Fall eines symmetrischen Elementensystemes zweiten Grades; letzteres geht in eine Involution über, wenn im Bereiche eines Tripels vollständige Vertauschungsfähigkeit herrscht![2] Wir können somit die Frage aufstellen, ob ein begleitendes System zu einer Involution werden kann. Die Frage ist gleichbedeutend mit der anderen: „Kann man der Curve C_4 ein Dreieck einschreiben, deren Seiten die Curve in drei Punktepaaren einer quadratischen Involution schneiden?" Die Ecken des Drei-

[1] Zwei Sehnen, von denen eine zwei und die andere die übrigen zwei Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte enthält.

[2] L. c. Art. 31.

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

eckes wären denn die Punkte eines Tripels der begleitenden Involution dritten Grades. Man erkennt jedoch leicht, dass dies nie der Fall sein kann, so lange die quadratische Involution eine eigentliche bleibt. Denn wir wissen, dass das begleitende System die drei Punktepaare d_i enthält; würde es zu einer Involution so würde auch diese die Paare d_i besitzen und müsste nach Früherem eine centrale cubische Involution sein, so dass die quadratische begleitende Involution in das Centrum der cubischen und die einzelnen Punkte der Curve C_4 zerfallen müsste.

„Das begleitende System wird also nur dann zu einer (centralen) cubischen Involution, wenn die quadratische Involution degenerirt, d. h. wenn ihre Paare aus einem festen Curvenpunkte und den einzelnen übrigen Curvenpunkten bestehen[1]".

IX. Halbfundamentale quadratische Involutionen und vierfach berührende Kegelschnitte.

Wir haben gleich anfangs drei quadratische Involutioren auf C_4 kennen gelernt, die gleichzeitig mit der Curve auf ihr gegeben erscheinen, und welche wir insbesondere als die Fundamentalinvolutionen bezeichnet haben. Es waren jene drei Involutionen, welche durch Strahlen, die durch die drei Doppelpunkte der Curve hindurchgehen auf derselben bestimmt werden. Nun haben wir uns mit den allgemeinen quadratischen Involutionen auf der Curve C_4 beschäftigt und gehen nun zu einem Mittelgliede „den halbfundamentalen Involutionen zweiten Grades" über. Wir nennen eine solche quadratische Punktinvolution auf C_4 halbfundamental, für welche die beiden Nachbarpunkte eines Doppelpunktes ein Paar bilden. (Bei den ganz fundamentalen centralen Involutionen waren zwei von den Paaren d_i der Involution angehörig.)

---

[1] Es sei bei dieser Gelegenheit bemerkt, dass im Falle einer Curve vierter Ordnung mit einem dreifachen Punkte das begleitende System immer eine cubische Involution ist, für welche die drei Nachbarpunkte des dreifachen Punktes ebenfalls eine Gruppe darstellen. Jedes Tripel der begleitenden Involution stellt mit dem dreifachen Punkte der Curve die Scheitel eines Kegelschnittbüschels dar, welches aus der Curve die quadratische Involution herausschneidet.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Man sieht sofort, dass sich drei Systeme halbfundamentaler Involutionen ergeben, je nachdem der erste, zweite oder dritte Doppelpunkt als Punktepaar in der Involution auftritt. Wir wollen das System, welches das Paar d_i enthält. als das i-te System bezeichnen. (Jede ganzfundamentale centrale Involution ist offenbar zwei halbfundamentalen Systemen gemeinschaftlich.)

„Eine halbfundamentale quadratische Involution eines gegebenen Systems ist durch ein Punktepaar bestimmt."

Denn zu diesem kommt noch das Paar der Nachbarpunkte des Doppelpunktes, welcher das System charakterisirt.

Es sei xx' ein Punktepaar einer halbfundamentalen Involution des i-ten Systemes, so dass die Involution durch die beiden Punktepaare xx', d_i, bestimmt erscheint.

Das Punktepaar xx', sei von $\xi\xi'$ begleitet, d. h. $\xi\xi'$ seien die zwei weiteren Schnittpunkte der Curve mit der Geraden xx'.

Dann sieht man sofort, dass die Involution auf C_4 bestimmt wird durch Kegelschnitte, welche dem Viereck $d_k d_l \xi\xi'$ umschrieben sind; denn der durch d_i gehende Kegelschnitt bestimmt das Paar d_i und der degenerirte Kegelschnitt $d^k d_l$, $\xi\xi'$ bestimmt das Punktepaar xx' auf C_4.

„Jede halbfundamentale Involution wird auf C_4 bestimmt durch ein Kegelschnittbüschel, dessen Scheitel von den beiden der Involution nicht angehörigen Doppelpunkten der Curve und dem irgend ein Punktepaar der Involution begleitenden Punktepaar dargestellt werden."

Die Punktepaare $\xi\xi'$ bilden wieder eine halbfundamentale Involution derselben Systeme; denn die durch ξ gehenden Strahlen bestimmen auf C_4 eine cubische Involution, welche mit der quadratischen Involution (xx') zwei Punktepaare gemeinsam hat, von denen d_i eines ist; es wird also ξ nur in einem begleitenden Paare vorkommen, womit der involutorische Charakter der Punktepaare $\xi\xi'$ nachgewiesen ist. Die centrale Involution, welche durch Strahlen, die durch d_i gehen auf C_4 bestimmt wird, hat mit der Involution (xx') ein Elementenpaar gemeinschaftlich, für welches offenbar d_i als begleitendes Punktepaar auftritt.

Es ist somit nachgewiesen:

„Jede halbfundamentale Involution zweiten Grades wird von einer zweiten Involution, die demselben Systeme angehört, be-

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

gleitet, so dass sich also die sämmtlichen halbfundamentalen Involutionen desselben Systemes in Paare gruppiren. Die beiden Involutionen eines Paares begleiten sich gegenseitig. Wählt man aus jeder der beiden sich begleitenden Involutionen ein Punktepaar, so liegen dieselben mit den beiden, dem Systeme nicht angehörigen Doppelpunkten der Curve C_4 auf einem und demselben Kegelschnitte."

Da das Elementenpaar d_i allen hatbfundamentalen Involutionen des i-ten Systems angehört, so werden die Doppelpunkte dieser Involutionen vom Punktepaare d_i harmonisch getrennt, und bilden somit eine quadratische Involution, für welche d_i das Doppelelementenpaar darstellt. D. h.:

„Die Doppelpunktepaare der halbfundamentalen quadratischen Involution des i-ten Systems bilden die nicht centrale quadratische Fundamentalinvolution, für welche die Nachbarpunkte des Doppelpunktes d_i die beiden Doppelelemente sind."

Auch sieht man sofort:

„Die Doppelelementenpaare der sich begleidenten halbfundamentalen Involutionspaare des i-ten Systems sind als Elementenpaare der nichtcentralen Fundamentalinvolution d_i projectivisch aufeinander bezogen".

Man sieht auch sofort, dass je zwei einander begleitende Involutionen projectivisch auf einander bezogen sind, indem jedem Paare von Punkten der einen ein Punktepaar, der andern Involution, nämlich das begleitende Paar entspricht.

Betrachten wir die Involutionscurve einer halbfundamentalen quadratischen Involution, d. h. die Einhüllende der Verbindungslinien einander entsprechenden Punkte. Irgend eine centrale biquadratische Involution hat mit der quadratischen Involution (4—1)(2—1), d. i. drei gemeinschaftliche Elementenpaare. Unter diesen ist aber auch das Punktepaar d_i, welches der halbfundamentalen Involution angehört; ausser d_i bleiben aber noch zwei gemeinschaftliche Punktepaare, d. h.:

„Die Involutionscurven der halbfundamentalen quadratischen Punktinvolutionen auf C_4 sind Curven zweiter Classe." Auch sieht man sofort, „dass zwei sich begleitende Involutionen denselben Involutionskegelschnitt besitzen."

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Den drei Systemen halbfundamentaler Involutionen werden also drei Systeme solcher Involutionskegelschnitte entsprechen, von denen jeder zwei sich begleitenden Involutionen angehört. Jede Tangente eines Involutionskegelschnittes schneidet C_4 in zwei Punktepaaren xx', $\xi\xi'$, von denen jedes einer der beiden sich begleitenden halbfundamentalen Involutionen angehört. Die beiden durch einen Punkt von C_4 gehenden Tangenten des Involutionskegelschnittes verbinden diesen Punkt mit den ihm in den beiden sich begleitenden Involutionen entsprechenden Punkten.

Der Involutionskegelschnitt hat mit der Curve C_4, welche von der sechsten Classe ist, zwölf gemeinschaftliche Tangenten. Eine solche kann in doppelter Art entstehen. Entweder fällt x mit x' oder y mit y' zusammen; dies gibt die Tangenten von C_4 in den vier Doppelpunkten der sich begleitenden Involutionen. Es kann aber auch einer der Punkte xx' mit einem der Punkte $\xi\xi'$ zusammenfallen; es falle z. B. x mit ξ zusammen, so dass x oder ξ der Berührungspunkt der Geraden $\overline{xx'\xi\xi'}$ mit C_4 wird.

Aus dem über die beiden durch einen Punkt von C_4 gehenden Tangenten des Kegelschnittes Gesagten folgt nun sofort, dass dieser Kegelschnitt die Curve C_4 in x (oder ξ) berührt.

Solcher Punkte gibt es vier; denn wenn x mit ξ zusammenfällt, so bildet dieser Punkt einen gemeinsamen Punkt der projectivisch auf einander bezogenen Involutionen (xx'), $(\xi\xi')$. Solche Involutionen sind jedoch nur ein specieller Fall zwei-zweideutiger Gebilde und haben somit vier gemeinsame Punkte, in denen ihr gemeinsamer Involutionskegelschnitt die Curve C_4 berührt:

„Die Involutionscurven der halbfundamentalen quadratischen Involutionen sind Kegelschnitte, welche die Curve vierfach berühren; die vier Berührungspunkte sind die gemeinsamen Punkte der beiden sich begleitenden projectivisch aufeinander bezogenen Involutionen und stellen die sämmtlichen acht Schnittpunkte der Curve C_4 mit dem Kegelschnitte dar. Die Tangenten in diesen Punkten sind acht von den gemeinschaftlichen Tangenten der Curve C_4 und des Kegelschnittes und die vier übrigen gemeinschaftlichen Tangenten beider Curven berühren C_4 in den Doppelpunkten der beiden halbfundamentalen Involutionen."

Jede Gerade der Ebene wird von drei vierfach berührenden Kegelschnitten desselben Systemes tangirt; sind nämlich $aa'a''a'''$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

vier Schnittpunkte der Geraden mit C_4, so erhält man die drei Kegelschnitte als Involutionscurven der drei halbfundamentalen Involutionen, welche bestimmt sind durch die Punktepaare $aa'\ d_i$; $aa'',\ d_i$; $aa'''\ d_i$; ebenso sind dieselben Kegelschnitte Involutionscurven der drei Involutionen $a''a''',\ d_i$; $a'a''',\ d_i$; $a'a'',\ d_i$.

Da die vier gemeinschaftlichen Tangenten der Curve C_4 und des Involutionskegelschnittes, welche ausser den Tangenten in den Berührungspunkten beider Curven auftreten, die Curve C_4 in den Doppelpunkten der sich begleitenden quadratischen Involutionen berühren und diesen Involutionen auch das Punktepanr d_i angehört, so haben wir den Satz:

„Legt man an die Curve C_4 und einen sie vierfach berührenden (Involutions-)Kegelschnitt des i-ten Systemes die vier gemeinschaftlichen Tangenten, so berühren sie die Curve C_4 in vier Punkten, welche zwei Paar bezüglich des Punktepaares d_i harmonisch conjugirter Punkte darstellen. Diese beiden Punktepaare gehören somit der nicht centralen quadratischen Fundamentalinvolution an, deren Doppelpunkte die Nachbarpunkte des Doppelpunktes d_i sind."